

APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS

*Silvia Carla Menti Propicio
Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática e Estatística
Licenciatura Plena em Matemática*

Resumo: Há muito tempo, em nossos currículos de ensino médio, trabalhamos com números complexos. Muitas vezes, passamos a nossos alunos a idéia de que a unidade imaginária i , serve apenas para extrair uma raiz negativa e não proporcionamos a eles a oportunidade de perceber o quão importante o conjunto dos números complexos é em suas aplicações. Com este artigo, tenho o objetivo de apresentar, de uma forma simples, como podemos fazer com que o aluno compreenda em que universo é aplicada a tão sugestiva unidade imaginária i .

Palavras-chave: números complexos, aplicação de números complexos, números complexos na física, números complexos no ensino médio.

Números Complexos e a Física

Há mais de 200 anos, a física e a matemática estão intimamente ligadas no que diz respeito a conjuntos numéricos.

Embora não haja um estudo mais aprofundado, já se sabe que atualmente, na física contemporânea, a aplicação do conjunto dos números complexos é tão grande, que é até possível pensar em uma autêntica " complejificación de la física", como cita o autor Frederico de Rubio y Galy em "The Role of Mathematics in the Rise of Science".

Nesta mesma obra, Dr Frederico dá aos números complexos a idéia de par ordenado: "um par ordenado de números reais, onde suas coordenadas representam a parte real e imaginária do complexo". Assim, apresenta como os números complexos podem multiplicar-se e como é simples a sua representação como vetor.

Fica claro então, como o universo de complexos se expande no mundo da física, onde é utilizado pelos físicos contemporâneos de forma familiar em diversas teorias. Vejamos alguns exemplos.

Vetores e Quantidades Complexas

Dado um número complexo determinado por (a,b) , onde a e b são números reais, podemos facilmente representá-lo em um plano. Tomando como base a localização de pares ordenados, localizamos o par (a,b) e formamos o vetor com origem em $(0,0)$ e extremidade em (a,b) .

No estudo de circuitos, a aplicação de números complexos aparece na forma de vetores, que determinam algumas equações importantes, com a presença da unidade imaginária.

Um circuito monofásico é alimentado por uma única tensão alternada. Quando a única dificuldade que a tensão sofre é a resistência efetiva, o circuito é dito puramente resistivo. Nesse circuito, a tensão E_R e a intensidade de corrente I atingem valores correspondentes ao mesmo tempo, o que faz com que os seus vetores representativos fiquem sobre o eixo de referência. Dizemos então que as grandezas estão em fase.

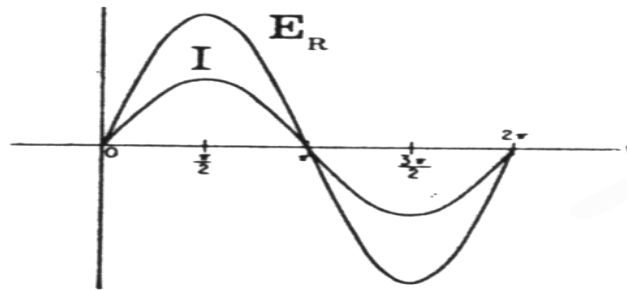


Figura III

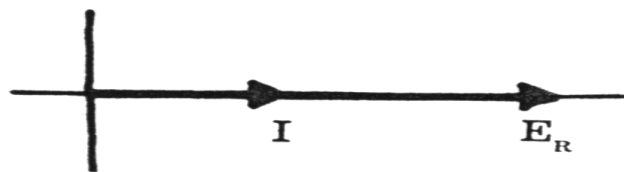


Figura IV

Quando a dificuldade que a corrente sofre é a reatância capacitiva, o circuito é chamado puramente capacitivo. Nesse circuito, E_C e I não atingem valores correspondentes ao mesmo tempo, de modo que os vetores que as representam fiquem um sobre cada eixo. Neste caso, dizemos que E_C e I estão defasadas 90° (I se antecipa aos valores de E_C).

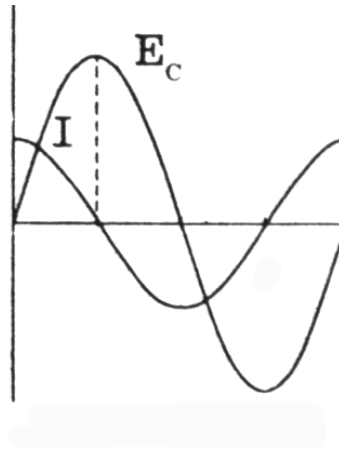


Figura V

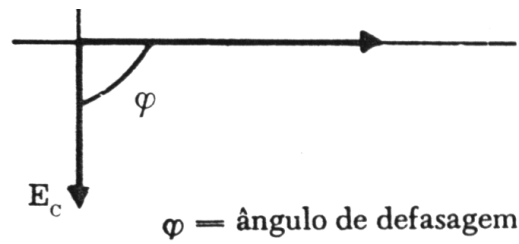


Figura VI

Quando o circuito apresenta como dificuldade à reatância indutiva, o circuito é chamado de puramente indutivo. Nesse circuito E_i e I também estão defasadas 90° (I está atrasada aos valores de E_i).

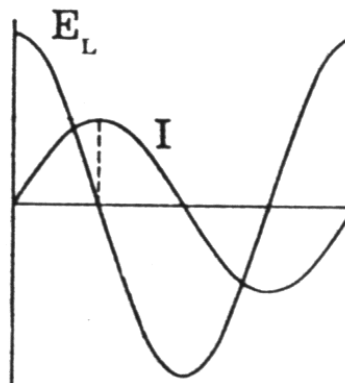


Figura VII

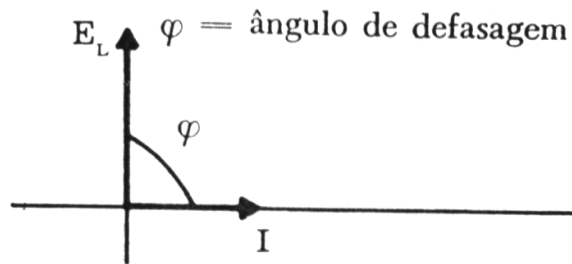


Figura VIII

Circuito em fase tipo R – C

R e C simbolizam a resistência e a capacitância equivalente. Nesse circuito, a dificuldade encontrada pela fonte para estabelecer uma corrente no circuito é determinada pela soma vetorial de R e X_c . A tensão E é a soma vetorial das componentes E_r e E_c .

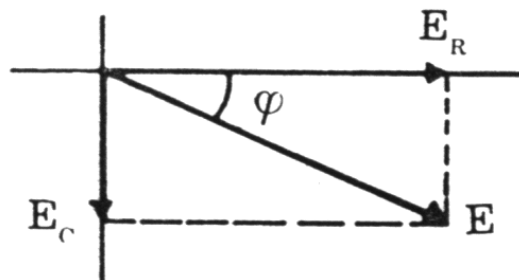


Figura IX

Observa-se que o ângulo de defasagem é menor que 90° , assim, podemos representar o vetor E na forma trigonométrica, onde $E = E \cos \theta - i \sin \theta$ ou na forma binômica $E = E_r - i E_c$.

Circuito em série tipo R – L – C

Neste tipo de circuito três situações podem ocorrer:

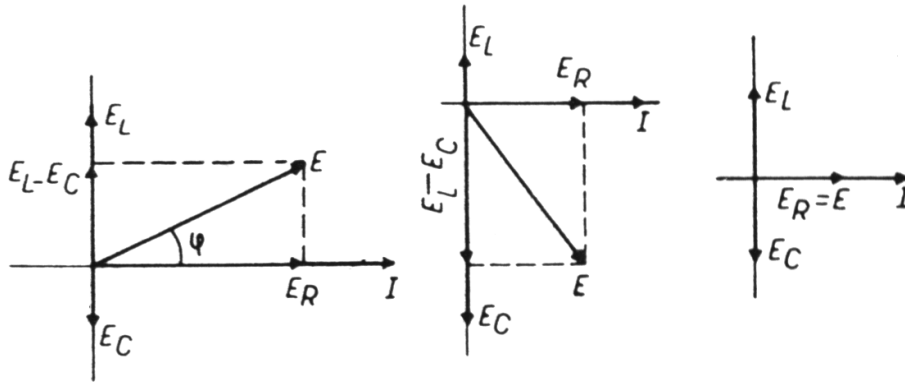


Figura X

No primeiro caso, o circuito comporta-se como circuito indutivo, o segundo como capacitivo e o terceiro como resistivo.

Nesse caso o vetor é representado na forma $E = E_r + i (E_l - E_c) = E \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

Números complexos e sinais sinusoidais

Além das formas trigonométrica e binômica, os números complexos podem ser representado em notação exponencial, onde $Z = P e^{i\theta}$, sendo P o módulo do complexo e θ o ângulo formado com o eixo de referência (argumento).

Esta propriedade dos complexos é muito utilizada para expressar as funções seno e cosseno em notação exponencial, onde:

$$\cos (x) = \frac{e^{i(x)} + e^{-i(x)}}{2}$$

$$\operatorname{sen} (x) = \frac{e^{i(x)} - e^{-i(x)}}{2i}$$

Assim, podemos representar as exponenciais complexas:

$$e^{i(x)} = \cos (x) + i \operatorname{sen} (x)$$

$$e^{-i(x)} = \cos (x) - i \operatorname{sen} (x)$$

Com isso, a resolução de uma equação com funções sinusoidais pode ser efetuada recorrendo a uma função exponencial complexa.

Números complexos e a função de onda

A equação de onda que rege o movimento dos elétrons foi obtida por Schrodinger em 1925. Esta equação é análoga a equação de onda clássica e o que a difere é justamente a aparição explícita do número imaginário i . Vejamos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

Vemos que essa equação é satisfeita pela função de onda harmônica, que nada mais é que um complexo em sua forma polar:

$$\psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)} = A [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)]$$

As funções de onda de Schrodinger não são necessariamente reais, contudo a probabilidade de encontrar um elétron é totalmente real. Para podermos encontrar essa probabilidade, mudaremos a interpretação da equação de onda de modo que ela seja real. Para isso, utilizaremos a propriedade que o complexo possui de, quando multiplicado por seu conjugado, se tornar real. Assim, a probabilidade será dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx = 1, \text{ onde } \psi^* \text{ é o conjugado do complexo } \psi$$

Esta equação é chamada de equação de normalização. Essa condição tem um papel importante na mecânica quântica, pois coloca uma restrição nas soluções da equação de Schrodinger que leva à quantização de energia.

Com os aspectos abordados acima, percebemos que o conjunto de números complexos tem um universo infinito de aplicações, que com a Física Moderna e descobertas recentes está aumentando cada vez mais. A exposição dessas aplicações no ensino médio deve ser feita de maneira simples e superficial, visto que nossos alunos não possuem muitos dos conhecimentos aqui abordados, mas o certo é, que não podemos priva-los desse entendimento.

Atualmente, o ensino da matemática em geral deve procurar trabalhar com exemplos práticos, na vida e em outras disciplinas (trabalhar a interdisciplinaridade), para despertar no aluno a vontade e o desejo de aprender. Com isso, qualquer assunto ou tópico construirá um conhecimento sólido e não superficial e os alunos conseguirão estabelecer relações mais facilmente.

Bibliografia:

CAVALCANTI, P. J. MENDES. Fundamentos da Eletrotécnica, ed. Rio de Janeiro, Freitas Bastos, 1989, 19ª. Edição.

GALI, Dr. FREDERICO RUBIO Y. The Role of Mathematics in the Rise of Science, Ed. Cast.:Alianza Editorial. S. A.,Madrid, 1991.

TIPLER. Física Moderna. Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro, 1981.

NUBILE, Paulo. Por dentro dos números complexos. Revista Nova Eletrônica, fevereiro, 1982.

Números Complexos e Sinais Sinusoidais, <http://analog.inesc.pt/smace/cap-11/fasorimp.htm>

Página original:

<http://hermes.ucs.br/ccet/deme/emsoares/inipes/complexos/>